

Basic Music Theory - 1

A Formalistic Note¹

Aug 13, 2024

Mepy

Minpows@outlook.com

前言

乐理总学不会怎么办? 仿生人有仿生人的路子, 让我们来 formalize 一下吧! 乐理的 naming convention 非常不好, 这不能赖我, 如三和弦与七和弦, **请自行适应**.

音符

$$\begin{aligned}\text{Note } X &:= | Y | \sharp X | \flat X \\ Y &:= | C | D | E | F | G | A | B\end{aligned}$$

其中² $\sharp X$ 读作升 X , $\flat X$ 读作降 X .

上述只包含了一组音符, 而乐器的音域不止一组音符, 以钢琴为例, 钢琴包含大字 2 组的 A \flat B B, 大字 1 组, 大字组, 小字组, 小字 1 组, 小字 2 组, 小字 3 组, 小字 4 组与小字 5 组的 C, 一共 $2 + 1 + 7 * (7 + 5) + 1 = 88$ 个音符.

约定: 小字 1 组的 C 称为中央 C, 小字 1 组的 A 标准发音频率为 440Hz.

为了更具体地区分音符, 一般有两种记法:

1. 大字组用大写字母, 小字组用小写字母, 大/小字 x 组加上标 x , 例如中央 C 是 c^1 ;
2. (科学音调记号法) 从大字 2 组往右赋予从 0 开始的索引 $i := 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, 统一记作 X_i , 例如中央 C 是 C_4 .

约定: 我用科学音调记号法, **不关心绝对音高或上下文自明时一般忽略组数**. 在没有组数的情况下, 为了强调高一组, 会上标一点, 例如 \acute{C} 比 C 高一组.

在电子音乐软件中, 一般使用科学音调记号法, 但对应索引有偏移, 例如 cubase 与 vocaloid 中 A3 才对应 440Hz 而非 A4, 又如 fl 中 A5 才对应 440Hz, 请以实际软件音高为准.

语义 φ : 十二平均律

取语义域 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, 其上伴有模 12 加法 $+$:

所谓的模 12 加法, 即加法后总对 12 取余数, 例如 $5 + 10 = 15 \equiv 3(\text{mod } 12)$.

这 12 个数字, 对应钢琴上一组琴键 7 白 + 5 黑: 白黑白黑白 白黑白黑白黑白,

因而有代数语义 $\varphi: \text{Note} \rightarrow \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$:

¹双关: Note 既指音符(Note), 也指笔记(Note).

²升降号只影响当前音符, 且这篇笔记不会引入五线谱, 我们不需要还原号 \natural .

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Note} &\rightarrow \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \\ \varphi \quad C &:= 0 \\ \varphi \quad D &:= 2 \\ \varphi \quad E &:= 4 \\ \varphi \quad F &:= 5 \\ \varphi \quad G &:= 7 \\ \varphi \quad A &:= 9 \\ \varphi \quad B &:= 11 \\ \varphi \quad \sharp X &:= (\varphi X) + 1 \\ \varphi \quad \flat X &:= (\varphi X) - 1 \end{aligned}$$

从语义中可以很清晰地看出 \sharp 升 \flat 降, 且升降的大小是 1. 我们把这样的 1 个单位称为 1 个半音. 每 1 个半音都会对应钢琴上 1 组相邻键的距离, 例如 CD 之间相差 2 个半音, 或说 1 个全音. 我们一般以半音作为基本单位, 这意味着, 所有音符之间的“距离”都是若干个半音. 平均化的半音隐含了十二平均律: 每个半音对应于 $2^{\frac{1}{12}}$ 的比例. 例如 D 频率是 C 频率的 $2^{2 \times \frac{1}{12}}$ 倍.

为此, 我们引入半音数 $\text{semiTone} : \text{Note} \times \text{Note} \rightarrow \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ 来表示两音之间相差的距离:

$$\begin{aligned} \text{semiTone} : \text{Note} \times \text{Note} &\rightarrow \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ \text{semiTone} \quad (X_1, X_2) &:= \varphi X_2 - \varphi X_1 \end{aligned}$$

CD 之间相差 2 个半音, 即 $\text{semiTone}(C, D) = \varphi D - \varphi C = 2 - 0 = 2$.

半音数一般用在一组音符内部, 但也可以拓展到不同组音符间, 此时只需加上 12 倍组数差即可. 约定: 我们使用十二平均律, 语义 φ 实际对应了十二平均律.

语义 ψ : 简谱记号

问题: 既然有 12 个半音, 为什么我们要用 7 个字母及其升降来表示?

十二平均律只是对这十二个半音的平均化, 在别的律制中, $\flat D$ 与 $\sharp C$ 并非同一音符, 但这远超这篇笔记所能记叙的内容, 因而我们先搁置不谈. 姑且将其视作历史与地理原因.

为此, 我们先取语义域 $1 + \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 其上伴有模 7 加法 +,

类似地, 这对应钢琴上一组琴键 7 白键, 因而也有代数语义 $\psi : \text{Note} \rightarrow 1 + \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \psi : \text{Note} &\rightarrow 1 + \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \\ \psi \quad C &:= 1 \\ \psi \quad D &:= 2 \\ \psi \quad E &:= 3 \\ \psi \quad F &:= 4 \\ \psi \quad G &:= 5 \\ \psi \quad A &:= 6 \\ \psi \quad B &:= 7 \\ \psi \quad \sharp X &:= \psi X \\ \psi \quad \flat X &:= \psi X \end{aligned}$$

语义 ψ 实际上是对应字母的简谱记号(固定调, 详见补遗).

音程

在 7 个字母表示音符的体系中, 两音之间相差的距离这一概念被称为**音程**, 可理解音符间路程. 音程的惯用单位是度(degree), 而非半音数, 并如下定义:

$$\begin{aligned} \text{deg} &: \text{Note} \times \text{Note} \rightarrow 1 + \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \\ \text{deg} \quad (X_1, X_2) &:= 1 + (\psi X_2 - \psi X_1) \end{aligned}$$

注意, 度数总是 1 +, 例如 C 到 C 是 1 度, C 到 D 是 2 度. 类似于半音数, 若在不同组间, 应加上 7 倍组数差, 例如 C4 到 C5 是 8 度. 因此, C5 被称为 C4 的八度音, **八度** 这一概念便来自于此.

显然, 仅凭度数并不能精确刻画音程, 因为 ψ 的语义域 $1 + \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ 明显小于 φ 的语义域 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

因此, 我们需要一个额外属性来表示音程, 即倍减/减/小/纯/大/增/倍增这些词头(前缀).

首先, 对于一个八度内, 我们对七个字母之间的音程做出规定:

1. 纯一度 $\text{semiTone} = 0 = \text{semiTone}(C, C)$
2. 大二度 $\text{semiTone} = 2 = \text{semiTone}(C, D)$
3. 大三度 $\text{semiTone} = 4 = \text{semiTone}(C, E)$
4. 纯四度 $\text{semiTone} = 5 = \text{semiTone}(C, F)$
5. 纯五度 $\text{semiTone} = 7 = \text{semiTone}(C, G)$
6. 大六度 $\text{semiTone} = 9 = \text{semiTone}(C, A)$
7. 大七度 $\text{semiTone} = 11 = \text{semiTone}(C, B)$
8. 纯八度 $\text{semiTone} = 12 = \text{semiTone}(C, \dot{C})$

这些词头是根据两音的协和程度来确定的: 纯一度的频率比为 1/1, 纯八度的频率比为 2/1, 纯五度的频率比约等于³ 3/2, 纯四度的频率比约等于 3/4, 因而用纯; 而其余比例都较复杂, 因而称大.

由于升降音符的存在, semiTone 的值会比上述大/纯的高或低, 按左低右高逐半音修改词头:

- 倍减/减/小/大/增/倍增
- 倍减/减/纯/增/倍增

例如: $\text{deg}(C, E) = \text{deg}(C, \flat E) = 3$, 而 $\text{semiTone}(C, E) = 4$, $\text{semiTone}(C, \flat E) = 3$, 因此前者被称为大三度, 后者被称为小三度. 注意: 尽管 $\varphi \flat E = \varphi \sharp D$, 但是 C- $\flat E$ 不同于 C- $\sharp D$ 增二度.

三和弦

三和弦是指三度叠加的三个音符 X_R, X_3, X_5 , 三个音依次称为根音(**Root**), 三音与五音, 且满足:

$$\text{deg}(X_R, X_3) = \text{deg}(X_3, X_5) = 3, \text{deg}(X_R, X_5) = 5$$

并且根据三度的情况有如下区分(绝大多数是以下四种, 且记作根音加属性):

- **大三和弦** X_R : X_R, X_3 大三度, X_3, X_5 小三度, X_R, X_5 纯五度;
- **小三和弦** $X_R \text{m}$: X_R, X_3 小三度, X_3, X_5 大三度, X_R, X_5 纯五度;
- **增三和弦** $X_R \text{aug}$: X_R, X_3 大三度, X_3, X_5 大三度, X_R, X_5 增五度;
- **减三和弦** $X_R \text{dim}$: X_R, X_3 小三度, X_3, X_5 小三度, X_R, X_5 减五度.

例如 C, E, G 是大三和弦, 记作 C, 因为 C 是根音, E 是三音, G 是五音, 而 C, E 是大三度, E, G 是小三度, C, G 是纯五度. 需要注意的是, E, G, \dot{C} 中 \dot{C} 是根音, E, G, \dot{C} 即所谓转位和弦 C/E.

又如小三和弦 Cm=C, $\flat E, G$, 增三和弦 Caug=C, E, $\sharp G$, 减三和弦 Cdim=C, $\flat E, \flat G$.

³十二平均律是对 3/2 的十二平均拟合, 关于律制, 这篇笔记不愿说更多.

自然大、小调

调式是组织音符的格式, 调性音乐的调式就如格律诗的格律一样需要遵守.

C (自然)大调要求音符从 $C - D - E - F - G - A - B$ 中选取, 这称为 C 大调的音阶, 因其频率排列像阶梯而得名. 其中 C 称为 C 大调的主音. 若将 C 大调的音阶整体升高 2 个半音, 便得到了 D 大调, 其音阶为 $D - E - \sharp F - G - A - B - \sharp C$, 如此类推, 我们可以得到 12 个自然大调:

- C 大调 $C - D - E - F - G - A - B$
- D 大调 $D - E - \sharp F - G - A - B - \sharp C$
- E 大调 $E - \sharp F - \sharp G - A - B - \sharp C - \sharp D$
- F 大调 $F - G - A - \flat B - C - D - E$
- G 大调 $G - A - B - C - D - E - \sharp F$
- A 大调 $A - B - \sharp C - D - E - \sharp F - \sharp G$
- B 大调 $B - \sharp C - \sharp D - E - \sharp F - \sharp G - \sharp A$

注意, 自然大调相邻音阶的音程为全全半全全全半.

练习: 分别写出 $\flat D$ 大调、 $\flat E$ 大调、 $\flat G$ 大调、 $\flat A$ 大调、 $\flat B$ 大调的音阶.

(注意: $\flat D$ 与 $\sharp C$ 在十二平均律下相等, 我们一般选用 \flat , 其书写较为简洁.)

相比自然大调, 自然小调一般用小写字母表示其主音. a (自然)小调的音阶是 $A - B - \dot{C} - \dot{D} - \dot{E} - \dot{F} - \dot{G}$, 其相邻音阶的音程为全半全全半全全, 类似整体平移可得其余 11 个小调.

值得注意的是, a 小调音阶与 C 大调音阶使用了相同的音符(忽略八度的差异), 因此称二者互为关系大小调, 即 a 小调是 C 大调的关系小调, C 大调是 a 小调的关系大调. 关系大调主音是关系小调主音的小三度(即 3 个半音), 可以验证 E 大调与 $\sharp C$ 小调互为关系大小调.

补遗: 唱名与简谱

唱名是唱音符时对该音的名称. 唱名有两种规定:

1. (固定唱名法) 不论调式, 一律将 C-D-E-F-G-A-B 依次唱作 do-rel-mi-fa-sol-la-si;
2. (首调唱名法) 对于自然大调而言, 对音阶依次唱作 do-rel-mi-fa-sol-la-si,
例如 D 大调中, 将主音 D 唱作 do, D-E- $\sharp F$ -G-A-B- $\sharp C$ 依次唱作 do-rel-mi-fa-sol-la-si.

与唱名相对应, 简谱也分裂为两种, 一种是如 ψ 的固定调记法, 另一种则是如 1=D 的首调记法.

约定: 我们使用首调唱名法, 除非使用 ψ 称呼, 否则简谱记法一律是首调记法.

补遗: 乐名

对于自然大调, 音阶七个音的乐名分别为:

1. 主音(Tonica): 前已叙述, X 大调的主音就是 X;
2. 上主音: 大二度音, 属音与上主音的高八度构成纯五度, 因而又称属音的“属音”;
3. 中音: 大三度音, 主属中间的音.
4. 下属音(Subdominant): 纯四度, 下属音的低八度与主音构成纯五度, 因而称下;
5. 属音(Dominant): 纯五度音;
6. 下中音: 大六度音, 下中音的低八度音与主音构成大三度;
7. 导音: 大七度音, 与主音高八度构成小二度, 因而容易导向主音.

补遗: 调内和弦与级数

所有组成音在调式音阶内的和弦称为调式和弦. 例如 C 大调的七个调内和弦为 C, Dm, Em, F, G, Am, Bdim. 在表示和弦时, 往往会用简谱或者对应的罗马数字(称作级数)来表示, 上例和弦会被记作 1, 2m, 3m, 4, 5, 6m, 7dim 或 I, IIIm, IIIIm, IV, V, VIIm, VIIIdim.