模态逻辑

Mepy

版本：T5
更新：2024 年 4 月 13 日

1 总览

模态逻辑引入了 $\Diamond$(或然) 与 $\Box$(必然) 两个算子, 最一般的诠释业已给出, 即模态逻辑是或然与必然的逻辑, 对于命题 P, $\Diamond P$ 表示 P 或然 (可能) 发生, $\Box P$ 表示 P 必然发生. 不过, 必然与或然如何被形式化为 $\Diamond$ 与 $\Box$ 却尚未明晰, 这是因为我们要界定何为必然发生, 何为或然发生. 因此, 本篇笔记在引入逻辑的文法之后, 立即给出其 Kripke 语义. 借助 Kripke 语义理解模态逻辑后, 我们才引入推理系统. 不同公理导致模态逻辑的性质不一, 我们也进行了一些分析. 笔者偏好 $S4$ 模态逻辑, 因此无论是记号抑或是分析内容, 都对 $S4$ 更友好. 最新文档地址.

2 文法

$$
\begin{aligned}
\text{Formula } \phi, \psi \in \mathscr{F} ::= \\
&\mid P \in \mathscr{P} && \text{(Proposition)} \\
&\mid \bot && \text{(False)} \\
&\mid \top && \text{(True)} \\
&\mid \phi \vee \psi && \text{(Disjunction)} \\
&\mid \phi \wedge \psi && \text{(Conjunction)} \\
&\mid \phi \to \psi && \text{(Implication)} \\
&\mid \Diamond \phi && \text{(Possibility)} \\
&\mid \Box \phi && \text{(Necessity)}
\end{aligned}
$$

我们惯常采用语法糖 $\neg\phi ::= \phi \to \bot, \phi \leftrightarrow \psi ::= (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$.

3 Kripke 语义

定义 3.1 Kripke 模型 (model) $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V)$, 其中集合 W 称为世界集, $w \in W$ 称为一个可能世界; $\rightsquigarrow$ 是 W 上的二元关系, 即 $\rightsquigarrow \subset W \times W$, 形如 $w \rightsquigarrow w'$; $V : W \to \mathscr{P} \to \mathbf{2}$ 是 w 索引的赋值函数, 陪域 $(\mathbf{2} ::= \{0, 1\}, \vee, \wedge, \to)$ 是二元布尔代数, 其可以被如下延拓为 $\overline{V} : W \to \mathscr{F} \to \mathbf{2}$, 一般也将 $\overline{V}$ 写作 V.

$$
\begin{aligned}
&\text{valuation } \overline{V}(w) ::= \\
&\quad \mid P && \mapsto V(w)(P) && \text{(Proposition)} \\
&\quad \mid \bot && \mapsto 0 && \text{(False)} \\
&\quad \mid \top && \mapsto 1 && \text{(True)} \\
&\quad \mid \phi \vee \psi && \mapsto \overline{V}(w)(\phi) \vee \overline{V}(w)(\psi) && \text{(Disjunction)} \\
&\quad \mid \phi \wedge \psi && \mapsto \overline{V}(w)(\phi) \wedge \overline{V}(w)(\psi) && \text{(Conjunction)} \\
&\quad \mid \phi \to \psi && \mapsto \overline{V}(w)(\phi) \to \overline{V}(w)(\psi) && \text{(Implication)} \\
&\quad \mid \Diamond\phi && \mapsto \bigvee_{w' \in W, w \rightsquigarrow w'} \overline{V}(w')(\phi) && \text{(Possibility)} \\
&\quad \mid \Box\phi && \mapsto \bigwedge_{w' \in W, w \rightsquigarrow w'} \overline{V}(w')(\phi) && \text{(Necessity)}
\end{aligned}
$$

定义 3.2 记全体模型构成集合为 $\mathscr{M}$, 对于某模型 $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V) \in \mathscr{M}$, 某世界 w, 以及某公式 $\phi \in \mathscr{F}$, 若 $\overline{V}(w)(\phi) = 1$, 则称模型 $\mathcal{M}$ 中世界 w 满足公式 ϕ, 记作 $\mathcal{M} \vDash_w \phi$;

若对于任意世界 $w \in W$, 都有 $\mathcal{M} \vDash_w \phi$, 则称模型 $\mathcal{M}$ 满足公式 ϕ, 记作 $\mathcal{M} \vDash \phi$;
进一步地, 若对于全体模型的子集 $\mathscr{M}_A \subset \mathscr{M}$ 中任意模型 $\mathcal{M} \in \mathscr{N}$, 都有 $\mathcal{M} \vDash \phi$,
则称 ϕ 为 $\mathscr{M}_A$ 类语义下的重言式 (tautology), 记作 $\vDash_A \phi$, 若 $\mathscr{M}_A = \mathscr{M}$, 则记为 $\vDash \phi$.

我们只需说明模态算子的语义, 这与世界集 W 上的二元关系 $\rightsquigarrow$ 有关系, 我们将 $w \rightsquigarrow w'$ 看作可从世界 w 抵达 w', 因此或然 $\Diamond\phi$ 的语义是, 在当前世界 w 中 $\Diamond\phi$ 真当且仅当存在后续世界 w' 满足 ϕ, 这就是 $\bigvee$ 的含义; 在当前世界 w 中 $\Box\phi$ 真当且仅当所有后续世界 w' 都满足 ϕ, 类似地用 $\bigwedge$.

4 道义公理与真值公理

值得注意的是布尔代数 **2** 是完备格, 因而有任意的 $\bigvee, \bigwedge$. 让我们讨论极端情况, 如果后续世界 w' 不存在时, 对应的语义是什么, 即 $\bigvee \varnothing = 0, \bigwedge \varnothing = 1$: 无论是否有 $\mathcal{M} \vDash_w \phi$, 总有 $\mathcal{M} \vDash_w \neg\Diamond\phi \wedge \Box\phi$. 这种模态逻辑的语义是极其怪异的, 对应释义为在世界 w 中 ϕ 不可能成立又必然成立! 为此, 我们给模型中的 $\rightsquigarrow$ 添加约束条件, 排除掉后续世界不存在的怪异情形.

定义 4.1 模型 $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V)$ 称为连续的 (serial), 当且仅当对于任意的 $w \in W$, 总有 w' 使得 $w \rightsquigarrow w'$.
注: 此处连续的是 serial 之意, 区别于 continuous.

命题 4.1 设模型 $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V)$ 是连续的, 则对于任意公式 ϕ, 总有 $\mathcal{M} \vDash \Box\phi \to \Diamond\phi$.

证明. 留作练习 (提示: 从必然中提取某后续 w' 使或然成立).

定义 4.2 公式 $D ::= \Box\phi \to \Diamond\phi$ 称为道义公理 (Deontic Axiom, D), 全体连续模型记作 $\mathscr{M}_D$, 则 $\vDash_D D$.

所谓的道义逻辑, 指的是一种必须与许可的逻辑，其中我们将 $\Box\phi$ 解释成必须做 ϕ, 将 $\Diamond\phi$ 解释成允许做 ϕ, 道义公理解释为: 我们必须做的事情, 是被允许做的事情.

事实上, 即便模型连续, 也并未使得语义符合我们的直观, 这表现为公式 $\Box\phi \to \phi$, 其诠释为 ϕ 必然成立蕴含 ϕ 成立, 这是再合理不过的直观了, 然而存在模型不满足该公式. 反模型的构造可以留给读者, 下面解释原因, 因为从后续世界 w' 的语义中无法推出前驱世界 w 的语义, 除非有某 $w' = w$, 即 $w \rightsquigarrow w$.

定义 4.3 模型 $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V)$ 称为自反的 (reflexive), 当且仅当对于任意的 $w \in W$, 总有 $w \rightsquigarrow w$.

定义 4.4 公式 $T ::= \Box\phi \to \phi$ 称为真值公理 (Truth Axiom, T), 全体自反模型记作 $\mathscr{M}_T$, 则 $\vDash_T T$.

下面两个命题留给读者验证.

命题 4.2 设模型 $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V)$ 是自反的, 则对于任意公式 ϕ, 总有 $\mathcal{M} \vDash \Box\phi \to \phi$.

命题 4.3 自反模型总是连续的, 即 $\vDash_T D$.

5 正规系统

定理 5.1 ϕ, ψ 是任意的公式变量, 以下公式均为重言式:

1. (N 公理): $\Box\phi$, 其中 ϕ 是重言式;
2. (K 公理): $\Box(\phi \to \psi) \to \Box\phi \to \Box\psi$;
3. $\Box\phi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\phi$.

证明. 设任意的模型 $\mathcal{M} = (W, \rightsquigarrow, V)$, 世界 $w \in W$,

1. 对于重言式 ϕ, 对任意 w' 有 $V(w')(\phi) = 1$, 考虑任意的 $w \rightsquigarrow w'$, 有 $M \vDash_w \Box\phi$, 显然 $M \vDash \Box\phi$;
2. 设 $V(w)(\Box(\phi \to \psi)) = 1, V(w)(\Box\phi) = 1$, 现证 $V(w)(\Box\psi) = 1$: 对于任意后续世界 w', 总有 $V(w')(\phi \to \psi) = 1, V(w')(\phi) = 1$, 此时必有 $V(w')(\psi) = 1$ 否则与布尔代数关于 $\to$ 的真值表矛盾, 从而 $V(w)(\Box\psi) = 1$;
3. 留作练习.

本节接下来的内容只考虑全体模型 $\mathscr{M}$, 我们来构造这一语义下的自然演绎推理系统. 当文法与规则不涉及 $\Box$ 与 $\Diamond$ 时, 推理系统实际上是直觉主义逻辑命题演算以及命题排中律拓展, 即经典逻辑命题演算. 我们在命题演算的基础上添加的只有 3 条规则, 分别是模态排中律, 公理 N 与公理 K.

定义 5.1 推理系统 K 定义如下, 并将 K 及其一致拓展统称为正规系统.

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash P}\ \textsc{Var} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi}\ \textsc{Weaken} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top\textsc{-Intro} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash \phi}\ \bot\textsc{-Elim}$$

$$\frac{}{\Gamma, \phi_1 \vdash \phi_1 \vee \phi_2}\ \vee\textsc{-Intro1} \qquad \frac{}{\Gamma, \phi_2 \vdash \phi_1 \vee \phi_2}\ \vee\textsc{-Intro2} \qquad \frac{\Gamma, \phi_1 \vdash \psi \qquad \Gamma, \phi_2 \vdash \psi}{\Gamma, \phi_1 \vee \phi_2 \vdash \psi}\ \vee\textsc{-Elim}$$

$$\frac{}{\Gamma, \phi_1, \phi_2 \vdash \phi_1 \wedge \phi_2}\ \wedge\textsc{-Intro} \qquad \frac{}{\Gamma, \phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \phi_1}\ \wedge\textsc{-Elim1} \qquad \frac{}{\Gamma, \phi_1 \wedge \phi_2 \vdash \phi_1}\ \wedge\textsc{-Elim2}$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \to \psi}\ \to\textsc{-Intro} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}\ \to\textsc{-Elim}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \phi \leftrightarrow \neg\neg\phi}\ \textsc{PropLEM} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Box\phi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\phi}\ \textsc{ModalLEM}$$

$$\frac{\vdash \phi}{\vdash \Box\phi}\ \textsc{Axiom}N \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Box(\phi \to \psi) \to \Box\phi \to \Box\psi}\ \textsc{Axiom}K$$

为了获得更多的经典逻辑直觉, 我们下面来证明一些命题:

命题 5.2 对于任意公式 ϕ,ψ, 总有 $\vdash(\phi\to\psi)\leftrightarrow(\neg\phi\lor\psi)$.

证明. 对于 $\to$, 我们只给出 $\phi\to\psi\vdash\neg\neg(\neg\phi\lor\psi)$, 后者结合排中律立刻有前者: $\Gamma ::= \phi\to\psi,\neg(\neg\phi\lor\psi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma,\phi\vdash\phi \qquad \Gamma\vdash\phi\to\psi}{\Gamma,\phi\vdash\psi}}{\Gamma,\phi\vdash\neg\phi\lor\psi} \qquad \Gamma\vdash(\neg\phi\lor\psi)\to\bot}{\Gamma,\phi\vdash\bot}}{\Gamma\vdash\neg\phi}}{\Gamma\vdash\neg\phi\lor\psi} \qquad \Gamma\vdash(\neg\phi\lor\psi)\to\bot}{\Gamma ::= \phi\to\psi,\neg(\neg\phi\lor\psi)\vdash\bot}}{\phi\to\psi\vdash\neg\neg(\neg\phi\lor\psi)}$$

至于 $\leftarrow$, 不必借助排中律, 其证明也显见, 如下:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi,\phi\vdash\phi \qquad \neg\phi,\phi\vdash\phi\to\bot}{\neg\phi,\phi\vdash\bot} \qquad \dfrac{\neg\phi,\phi,\bot\vdash\psi}{\neg\phi,\phi\vdash\bot\to\psi}}{\neg\phi,\phi\vdash\psi} \qquad \psi,\phi\vdash\psi}{\neg\phi\lor\psi,\phi\vdash\psi}}{\neg\phi\lor\psi\vdash\phi\to\psi}$$

命题 5.3 (对偶原理) 对于任意公式 ϕ, 总有 $\vdash \neg\phi \leftrightarrow \phi^*$, 其中运算 ϕ^* 归纳定义如下:

$$
\begin{aligned}
&\text{star-neg } (-)^* ::= \\
&\qquad \mid P && \mapsto \neg P && \text{(Proposition)} \\
&\qquad \mid \bot && \mapsto \top && \text{(False)} \\
&\qquad \mid \top && \mapsto \bot && \text{(True)} \\
&\qquad \mid \phi \vee \psi && \mapsto \phi^* \wedge \psi^* && \text{(Disjunction)} \\
&\qquad \mid \phi \wedge \psi && \mapsto \phi^* \vee \psi^* && \text{(Conjunction)} \\
&\qquad \mid \phi \to \psi && \mapsto \neg(\psi^* \to \phi^*) && \text{(Implication)} \\
&\qquad \mid \Diamond\phi && \mapsto \Box\phi^* && \text{(Possibility)} \\
&\qquad \mid \Box\phi && \mapsto \Diamond\phi^* && \text{(Necessity)}
\end{aligned}
$$

特别地, 我们有 $\vdash (\phi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\phi)$.

证明. 对 ϕ^* 归纳即可, 我们只讨论模态算子的分支, 对于 $\vdash \Box\phi \leftrightarrow \neg\Diamond\phi^*$, 使用归纳假设 $\vdash \phi \leftrightarrow \neg\phi^*$ 应证明 $\vdash \Box\phi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\phi$, 这是公理; 对于 $\vdash \Diamond\phi \leftrightarrow \neg\Box\phi^*$, 应证明 $\vdash \neg\neg\Diamond\neg\neg\phi \leftrightarrow \neg\Box\neg\phi$, 类似易证.

定义 5.2 含有 $\phi_1, ..., \phi_n$ 的公式 $A_{\phi_1,...,\phi_n}$, 公式 $\neg A_{\neg\phi_1,...,\neg\phi_n}{}^*$ 称为其对偶公式, 记作 A^∂.

$K^\partial ::= \Box(\psi \to \phi) \to \Diamond\psi \to \Diamond\phi$, 方便起见, 我们对调 ϕ, ψ 位置, 令 $K^\partial ::= \Box(\phi \to \psi) \to \Diamond\phi \to \Diamond\psi$

推论 (对偶原理) 如果 A 是公理, 那么 A^∂ 可推, 即 $\vdash_A A^\partial$; 反之亦有 $\vdash_{A^\partial} A$.

证明. 从对偶原理知, $\vdash A_{\neg i_1,\dots,\neg\phi_n} \leftrightarrow \neg A_{\neg\phi_1,\dots,\neg\phi_n}{}^*$, 若 $A_{\phi_1,\dots,\phi_n}$ 是公理, 即任取 $\phi_1,\dots,\phi_n$, 均有 $\vdash A_{\phi_1,\dots,\phi_n}$, 那么也有 $\vdash \neg A_{\phi_1,\dots,\phi_n}{}^*$. 不妨代入 $\neg\phi_1,\dots,\neg\phi_n$, 此时有 $\vdash A^\partial$.

公理 K 的对偶原理直接导致了如下导出规则:

定理 5.4 如下导出规则可靠 (Sound), 其证明由公理 N 与公理 K 及其对偶 K^∂ 直接给出:

$$\frac{\vdash \phi \to \psi}{\vdash \Box\phi \to \Box\psi}\ \Box\text{-}\textsc{Functor} \qquad \frac{\vdash \phi \to \psi}{\vdash \Diamond\phi \to \Diamond\psi}\ \Diamond\text{-}\textsc{Functor}$$

导出规则的命名是有意的, 我们已将 $\Box, \Diamond$ 看作 $\mathscr{F}$ 上的自函子了, 只不过这需要一些范畴论知识, 留给有兴趣的读者赏玩. 这里只提几句, 我们将 $\vdash \phi \to \psi$ 的证明树视为等价的 (即证明无关性 proof-irrelevance), 从而态射 $\phi \to \psi$ 若要存在则必唯一, 因此 $\Box, \Diamond$ 的函子性便能得证. 某些公理 A_ϕ 可以视为自然变换 A, 给出从对象 ϕ 到态射 A_ϕ 的映射, 例如 $D ::= \Box\phi \to \Diamond\phi : \Box \to \Diamond, T ::= \Box\phi \to \phi : \Box \to \mathbf{Id}$.

定理 5.5 系统 K 是可靠的 (Sound), 即对于任意公式 ϕ, 如果 $\vdash \phi$, 那么 $\vDash \phi$.

定理 5.6 系统 K 是完备的 (Complete), 即对于任意公式 ϕ, 如果 $\vDash \phi$, 那么 $\vdash \phi$.

可靠性的证明只需对证明序列 $\vdash \phi$ 进行归纳, 而完备性较为复杂, 此处省略.

6 公理 D 与公理 T 对应的模态逻辑

我们已经见过两个额外的公理了, 他们分别是公理 D 与公理 T. 为了区分, 我们将系统 K 的推理符号记作 $\vdash_K$, 将公理 D 与公理 T 分别加入系统中, 就得到了两个正规系统 $\vdash_D$ 与 $\vdash_T$.

定义 6.1 我们没有写出 D^∂, 这是因为 $D^\partial = D$.

$$\frac{}{\Gamma \vdash_D \Box\phi \to \Diamond\phi}\ \textsc{Axiom}D \qquad \frac{}{\Gamma \vdash_T \Box\phi \to \phi}\ \textsc{Axiom}T \qquad \frac{}{\Gamma \vdash_T \phi \to \Diamond\phi}\ \textsc{Axiom}T^\partial$$

在语义上, 满足公理 T 的模型总满足公理 D; 在推理系统上, 从公理 T 能推出公理 D:

命题 6.1 对于任意的 ϕ, $\vdash_T D$.

证明. $\vdash_T D : \Box\phi \xrightarrow{T} \phi \xrightarrow{T^\partial} \Diamond\phi$

7 公理 B、公理 4 与公理 5

下面将介绍公理 B、公理 4 与公理 5, 我们仍先从语义视角介绍公理, 然后再建立其推理系统.

简要地说, 公理 B 对应 $\rightsquigarrow$ 的对称性, 公理 4 对应传递性, 公理 5 对应欧几里得性, 这些公理与性质由如下陈述, 对应的证明留给读者证明.

定义 7.1 记公式 $B ::= \phi \to \Box\Diamond\phi$, 其对偶 $B^{\partial} ::= \Diamond\Box\phi \to \phi$, 全体对称模型记作 $\mathscr{M}_B$;
模型 $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V)$ 是对称的 (symmetric), 当且仅当对任意 $w \rightsquigarrow w'$, 总有 $w' \rightsquigarrow w$.

定义 7.2 记公式 $4 ::= \Box\phi \to \Box\Box\phi$, 其对偶 $4^{\partial} ::= \Diamond\Diamond\phi \to \Diamond\phi$, 全体传递模型记作 $\mathscr{M}_4$;
模型 $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V)$ 是传递的 (transitive), 当且仅当对任意 $w \rightsquigarrow w', w' \rightsquigarrow w''$, 总有 $w \rightsquigarrow w''$.

定义 7.3 记公式 $5 ::= \Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$, 其对偶 $5^{\partial} ::= \Diamond\Box\phi \to \Box\phi$, 全体欧几里得模型记作 $\mathscr{M}_5$;
模型 $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V)$ 是欧几里得的 (Euclidean), 当且仅当对任意 $w \rightsquigarrow w_1, w \rightsquigarrow w_2$, 总有 $w_1 \rightsquigarrow w_2$.

命题 7.1 设模型 $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V)$ 是对称的, 则总有 $\mathcal{M} \vDash \phi \to \Box\Diamond\phi$, 即 $\vDash_B B$.

命题 7.2 设模型 $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V)$ 是传递的, 则总有 $\mathcal{M} \vDash \Box\phi \to \Box\Box\phi$, 即 $\vDash_4 4$.

命题 7.3 设模型 $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V)$ 是欧几里得的, 则总有 $\mathcal{M} \vDash \Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$, 即 $\vDash_5 5$.

我们从语义的角度给出公理之间的联系, 即如下命题:

命题 7.4 $\vDash_{B4} 5, \vDash_{B5} 4$, 即 $\mathscr{M}_{B4} = \mathscr{M}_{B5} = \mathscr{M}_{B45}$.

1. ($\vDash_{B4} 5$): 设模型 $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V)$ 是对称传递的, 现证 $\mathcal{M}$ 也是欧几里得的, 任取 $w \rightsquigarrow w_1, w \rightsquigarrow w_2$, 结合对称性知 $w_1 \rightsquigarrow w$, 结合传递性知 $w_1 \rightsquigarrow w_2$;
2. ($\vDash_{B5} 4$): 设模型 $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V)$ 是对称欧几里得的, 现证 $\mathcal{M}$ 也是传递的, 任取 $w \rightsquigarrow w', w' \rightsquigarrow w''$, 结合对称性知 $w' \rightsquigarrow w$, 结合欧几里得性知 $w \rightsquigarrow w''$.

现在让我们建立推理系统:

$$\frac{}{\Gamma \vdash_B \phi \to \Box\Diamond\phi}\ \textsc{Axiom}B \qquad \frac{}{\Gamma \vdash_B \Diamond\Box\phi \to \phi}\ \textsc{Axiom}B^{\partial}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_4 \Box\phi \to \Box\Box\phi}\ \textsc{Axiom}4 \qquad \frac{}{\Gamma \vdash_4 \Diamond\Diamond\phi \to \Diamond\phi}\ \textsc{Axiom}4^{\partial}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash_5 \Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi}\ \textsc{Axiom}5 \qquad \frac{}{\Gamma \vdash_5 \Diamond\Box\phi \to \Diamond\phi}\ \textsc{Axiom}5^{\partial}$$

公理间在模型语义上有联系, 在推理系统中亦然.

命题 7.5 $\vdash_{B4} 5, \vdash_{B5} 4$, 证明如下图所示:

$$\vdash_{B4} 5 : \Diamond\phi \xrightarrow{B_{\Diamond\phi}} \Box\Diamond\Diamond\phi \xrightarrow{\Box 4^{\partial}_{\phi}} \Box\Diamond\phi$$

$$\vdash_{B5} 4 : \Box\phi \xrightarrow{B_{\Box\phi}} \Box\Diamond\Box\phi \xrightarrow{\Box 5^{\partial}_{\phi}} \Box\Box\phi$$

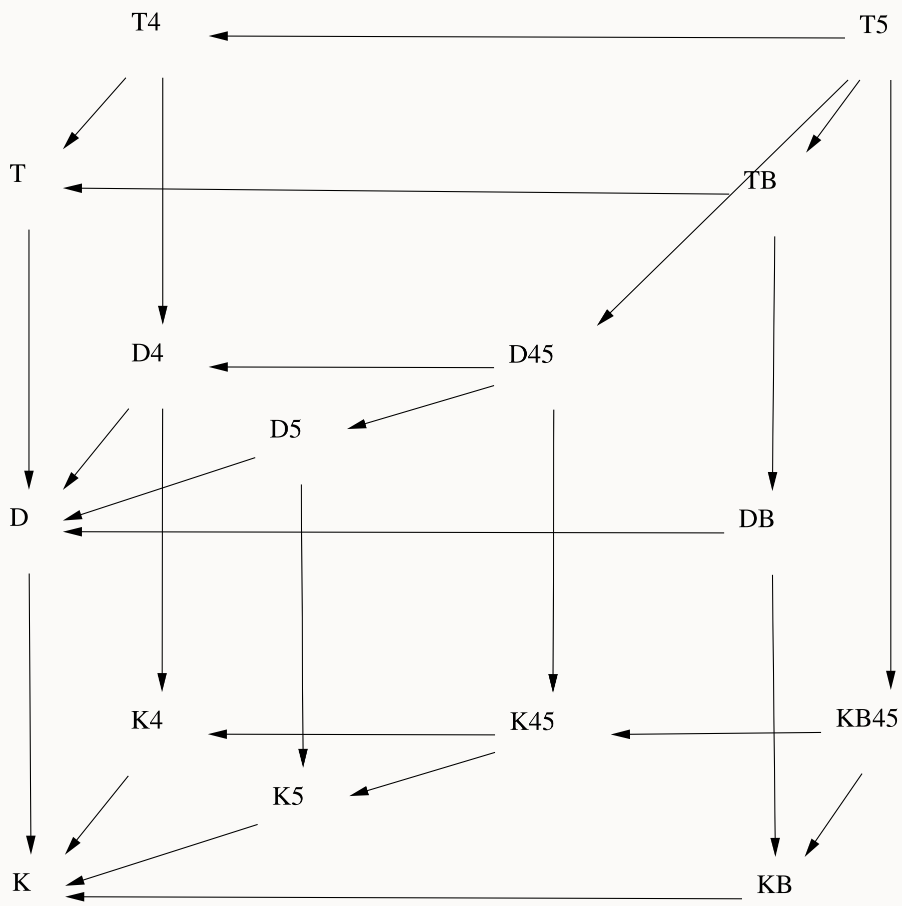


图 1: the Modal Lattice

8 正规系统之间的关系

如上图所示, 不同的公理扩展之间存在包含关系, 例如 $T \to D$ 意味着系统 T 包含着系统 D. 注意观察, 关于 (D,T) 与 $(B,4,5)$ 之间并不正交, D 层处缺失了 $DB45$, T 层处缺失了 $T45$ 与 $TB45$.

这是因为缺失的 $DB45$、$T45$ 以及 $TB45$ 与 $T5$ 都等价, 由如下命题确保:

命题 8.1 $\vdash_{DB4} T$, 设模型 $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V)$ 是连续对称传递的, 任取 $w \in W$, 由连续性保证存在某 $w' \in W$, 使得 $w \rightsquigarrow w'$, 由对称性有 $w' \rightsquigarrow w$, 由传递性有 $w \rightsquigarrow w$, 即模型 $\mathcal{M}$ 也是自反的.

$$\vdash_{DB4} T : \Box\phi \xrightarrow{4} \Box\Box\phi \xrightarrow{D_{\Box\phi}} \Diamond\Box\phi \xrightarrow{B^{\partial}} \phi$$

命题 8.2 $\vdash_{T5} B$, 设模型 $\mathcal{M} ::= (W, \rightsquigarrow, V)$ 是自反欧几里得的, 任取 $w \rightsquigarrow w'$, 由自反性有 $w \rightsquigarrow w$, 由欧几里得性有 $w' \rightsquigarrow w$, 即模型 $\mathcal{M}$ 也是对称的.

$$\vdash_{T5} B : \phi \xrightarrow{T^{\partial}} \Diamond\phi \xrightarrow{5} \Box\Diamond\phi$$

有了这两个命题之后, 我们来最后讨论 45 与 $B45$ 的关系, 事实上二者是真包含关系, 我们可以构造一个模型来验证这一点. 由于 $\vdash_{T5} B$, 显然我们的模型不能包含自反性条件, 此时容易构造:

例 8.1 模型 $\mathcal{M} ::= (\{w_1, w_2\}, \rightsquigarrow, V)$, 其中 $\rightsquigarrow$ 如下图所示, 容易验证 $\mathcal{M} \in \mathscr{M}_{45}$ 以及 $\mathcal{M} \notin \mathscr{M}_{B45}$.

$$\begin{tikzcd} w_1 \arrow[r, rightsquigarrow] & w_2 \arrow[loop below, rightsquigarrow] \end{tikzcd}$$

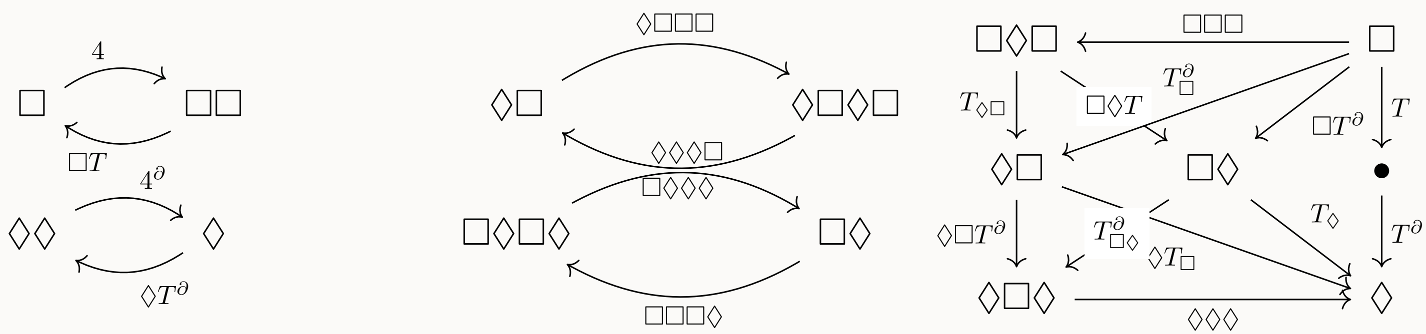
值得注意的是, 上述提到的推理系统 $\vdash_A$ 相对于其语义 $\vDash_A$ 是可靠且完备的, 只是没有给出证明; 另外, 习惯上把公理 N, K, T 的聚集记作 S, 例如 $S4$ 指的是含有公理 $N, K, T, 4$ 的模态逻辑系统, 这是因为存在非正规的模态逻辑系统, 只是本文并不涉及. 本文后续仍将继续使用类似于 $T4$ 的记号.

9 $T4$ 模态词的规约

借助模态排中律, 可以将公式中的否定词 $\neg$ 向左提取, 即 $\vdash \Box\neg\phi \to \neg\Diamond\phi, \vdash \Diamond\neg\phi \to \neg\Box\phi$; 再根据命题排中律, 可以将否定词 $\neg$ 规约剩余至多一个, 最终得到形如 F 或 $\neg F$ 的形式, 其中 $F \in \{\Box, \Diamond\}^*$ 称为模态词串. 对于模态词 F 以及命题变量 $P \in \mathscr{P}$, 若将 $F\ P$ 规定为原子命题, 则模态逻辑可以规约为一个命题逻辑. 在模态逻辑系统中, 模态词串有无穷多个. 然而在本文探讨的一些系统中, 模态词串在逻辑等价下只有有限个等价类, 计算等价类代表元的过程, 称作规约.

我们先讨论 $T4$, 再讨论其他系统.

命题 9.1 在系统 $\vdash_{T4}$ 中, 如下可推:



由上述命题, 模态词串可被规约为 7 种情形, 分别是 $\bullet, \Box, \Diamond, \Box\Diamond, \Diamond\Box, \Box\Diamond\Box, \Diamond\Box\Diamond$.

T^∂ 与 4^∂ 共同说明了 $\Diamond$ 的单子性 (monadicity), 从这个角度上, $T4$ 是一个好系统.

10 $K5$ 模态词的规约

引理 10.1 $\vdash \Box\phi \to (\Box\psi \to \Box(\phi \wedge \psi))$, 进而 $\vdash \Box\phi \wedge \Box\psi \to \Box(\phi \wedge \psi)$.

证明. 如下图所示:

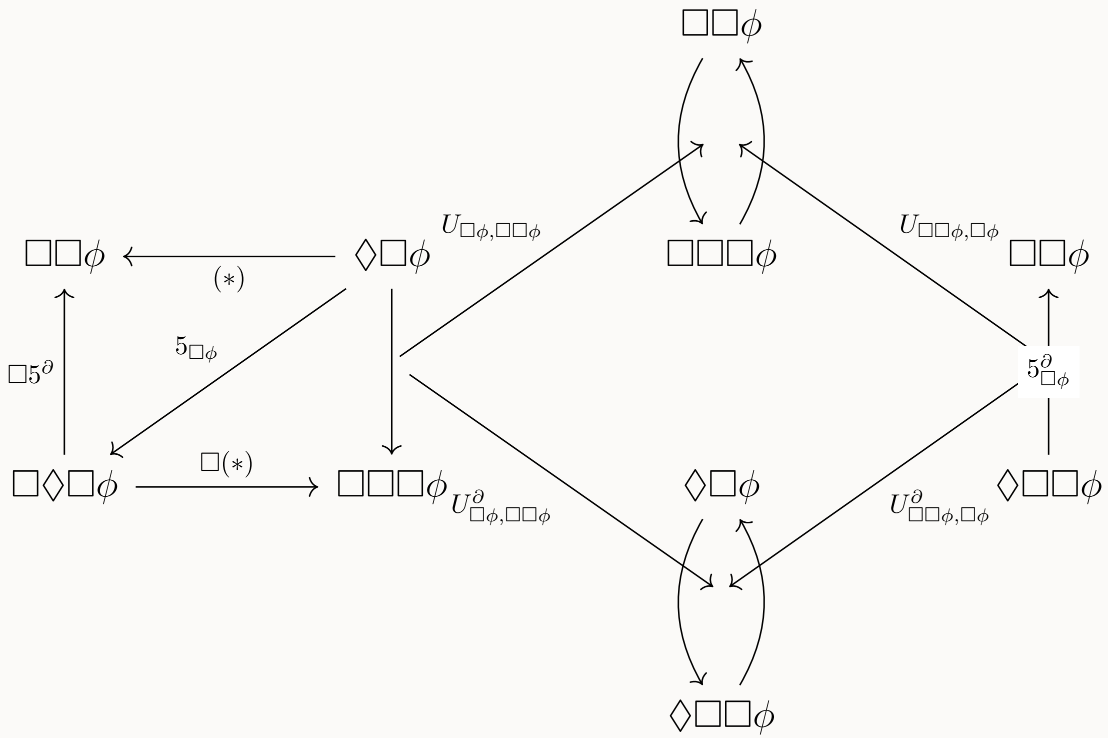
$$\begin{tikzcd}
\vdash \phi \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \Box"] & \psi \to (\phi \to \psi) \\
\vdash \Box\phi \arrow[r] & \Box(\psi \to (\phi \to \psi)) \arrow[r, "K_{\psi,\phi\to\psi}"] & \Box\psi \to \Box(\phi \to \psi)
\end{tikzcd}$$

定理 10.2 (划一定理) $\vdash U, \vdash U^{\partial}$, 其中:
$U_{\phi,\psi} ::= (\Diamond\phi \to \Box\psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$, $U^{\partial}_{\phi,\psi} ::= \neg U^{*}_{\neg\psi,\neg\phi} = (\Diamond\phi \to \Box\psi) \to (\Diamond\phi \to \Diamond\psi)$.

证明. 由对偶原理有 $\vdash (\Diamond\phi \to \Box\psi) \to (\Box\neg\phi \vee \Box\psi)$, 下证 $\vdash (\Box\neg\phi \vee \Box\psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$:

$$
\AxiomC{$\Box\neg\phi, \Box\phi \vdash \Box(\neg\phi \wedge \phi)$}
\AxiomC{$\vdash \neg\phi \wedge \phi \to \psi$}
\RightLabel{$\textsc{Axiom}N$}
\UnaryInfC{$\vdash \Box(\neg\phi \wedge \phi) \to \Box\psi$}
\BinaryInfC{$\Box\neg\phi, \Box\phi \vdash \Box\psi$}
\UnaryInfC{$\Box\neg\phi \vdash \Box\phi \to \Box\psi$}
\AxiomC{$\Box\psi, \Box\phi \vdash \Box\psi$}
\UnaryInfC{$\Box\psi \vdash \Box\phi \to \Box\psi$}
\BinaryInfC{$\Box\neg\phi \vee \Box\psi \vdash \Box\phi \to \Box\psi$}
\DisplayProof
$$

命题 10.3 在系统$\vdash_{K5}$中, 如下可推:(其对偶定理留作练习)



$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\Box\Box\phi \arrow[d, ""{name=L}] & \Diamond\Box\phi \arrow[d, "5_{\Box\phi}" description, ""{name=M}] & \Diamond\Box\phi \arrow[d, ""'{name=R}] \\
\Box\Diamond\Box\phi \arrow[u, bend left=30, "\Box 5^{\partial}"] & \Box\Diamond\Box\phi & \Diamond\Diamond\Box\phi \arrow[u, bend right=30, "\Diamond 5^{\partial}"']
\arrow[from=M, to=L, "U_{\Box\phi,\Diamond\Box\phi}"']
\arrow[from=M, to=R, "U^{\partial}_{\Box\phi,\Diamond\Box\phi}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\Box\Box \arrow[d, "?"'] & & \Diamond\Box \arrow[ll, "(*)"'] \arrow[d, "?"] \\
\Box \arrow[d] & \bullet & \Diamond \arrow[d] \\
\Box\Diamond & & \Diamond\Diamond \arrow[ll, "(*)^{\partial}"]
\end{tikzcd}
$$

由上述命题, 模态词串可被规约为 7 种情形, 分别是 $\bullet, \Box, \Diamond, \Box\Diamond, \Diamond\Box, \Box\Box, \Diamond\Diamond$.

标注?的态射在语义上是重言式, 推理系统上的证明较难想到, 详见杂录关于 $T5$ 与 $K5$ 的关系.

11 $D5$ 模态词的规约

命题 11.1 在系统$\vdash_{D5}$中, 如下可推, 且模态词串可被规约为 5 种情形, 分别是 $\bullet, \Box, \Diamond, \Box\Box, \Diamond\Diamond$:

$$
\begin{tikzcd}
\Diamond\Box \arrow[r, bend left, "(*)"] & \Box\Box \arrow[l, bend left, "D_{\Box}"] \arrow[d, bend right] & \bullet & \Diamond\Diamond \arrow[r, bend left, "(*)^{\partial}"] & \Box\Diamond \arrow[l, bend left, "D_{\Diamond}"] \\
& \Box \arrow[rr, "D"'] & & \Diamond \arrow[u, bend right] &
\end{tikzcd}
$$

12 $K45$ 模态词的规约

命题 12.1 在系统$\vdash_{K45}$中, 如下可推, 且模态词串可被规约为 5 种情形, 分别是 $\bullet, \Box, \Diamond, \Box\Diamond, \Diamond\Box$:

$$
\begin{tikzcd}
& & \Diamond\Box \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\Box\Box \arrow[r, bend right, "?"'] & \Box \arrow[l, bend right, "4"'] \arrow[dr] & \bullet & \Diamond \arrow[r, bend right, "?"'] & \Diamond\Diamond \arrow[l, bend right, "4^{\partial}"'] \\
& & \Box\Diamond \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

13 $T5$ 模态词的规约

命题 13.1 在系统 $\vdash_{T5}$ 中, 如下可推, 且模态词串可被规约为 3 种情形, 分别是 $\bullet, \Box, \Diamond$:

$$
\begin{tikzcd}
\Box\Box \arrow[dr, bend left, "\Box T"] & & & & \Box\Diamond \arrow[dl, bend right, "T_\Diamond"'] \\
& \Box \arrow[ul, bend left, "4"] \arrow[dl, bend left, "T^\partial_\Box"] \arrow[r, "T"] & \bullet \arrow[r, "T^\partial"] & \Diamond \arrow[ur, bend right, "5"'] \arrow[dr, bend right, "\Diamond T^\partial"'] & \\
\Diamond\Box \arrow[ur, bend left, "5^\partial"] & & & & \Diamond\Diamond \arrow[ul, bend right, "4^\partial"']
\end{tikzcd}
$$

14 杂录

1 修改自 2022slides, 关于一阶谓词以及自然语言的诠释等内容, 此处不再复述. 关于 $T5$ 与 $K5$, 应有如下, 参考: https://philosophy.stackexchange.com/questions/75634/

$$
\frac{\vdash_{T5} \phi}{\vdash_{K5} \Box\phi} \qquad \frac{\vdash_{T5} \phi}{\vdash_{K5} \Diamond\phi}
$$

关于直觉主义下的 $S4$, 可以参考如下文献:

1. STLC/S4: https://www.cs.cmu.edu/ fp/papers/mscs00.pdf
2. MLTT/S4: https://dl.acm.org/doi/10.1145/3341711